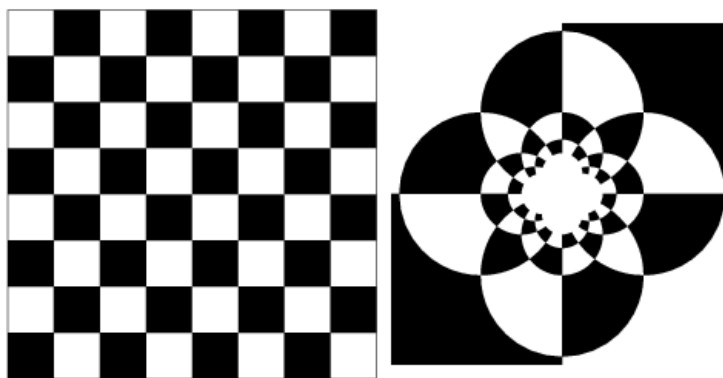


*Зелінський Максим,
студент IV курсу, напрям підготовки «Математика»,
Науковий керівник – Франовський А.Ц.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент*

ІНВЕРСІЯ ЯК ОДИН ІЗ МЕТОДІВ КОНСТРУКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У геометрії одну з основних ролей відіграють різноманітні перетворення фігур. Важливою особливістю цих перетворень є зображення ними природи простих геометричних образів: прямі перетворюються в прямі, а коло – в коло. Інверсія є складнішим перетворенням геометричних фігур, при якому прямі вже можуть переходити в кола і навпаки. Такий підхід дозволяє дати в застосуванні до завдань елементарної геометрії однакову методику вивчення.

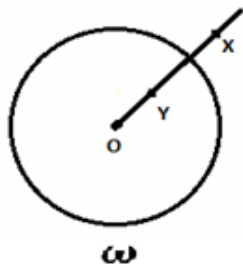
Поняттям інверсії займалися такі математики: Аполлоній, Пашш, Посельє, Ліпкін, Гарт. Інверсія цікава тим, що за допомогою неї можна робити різні нестандартні, неперевершені перетворення.



інверсія шахової дошки

Інверсією з центром у точці O відносно кола ω називається перетворення площини, при якому кожна точка X площини переходить у точку Y цієї ж площини таку, що

$$OX \cdot OY = R^2$$



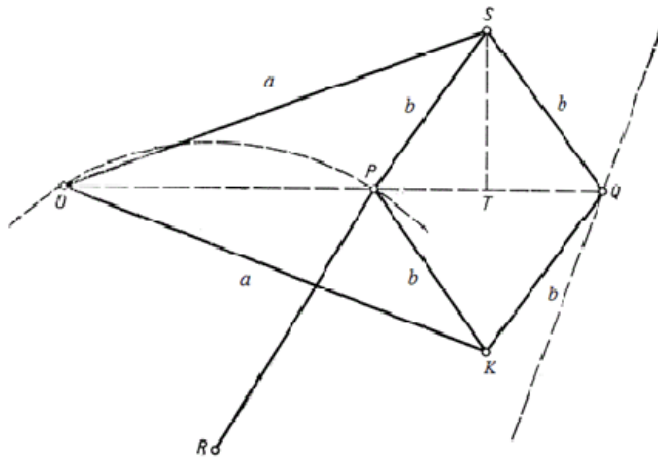
за означенням інверсії

При цьому коло ω називається колом інверсії, його центр O - **центром інверсії**, точка Y - **образом точки X при перетворенні інверсії**, а точка X - **прообразом**.

Механізм, який здійснює побудову інверсних фігур, називається **інверсором**.

Розглянемо геометричну побудову інверсора Посельє (винайдений у 1864 році) являє собою систему шести стержнів,

скріплених на кінцях шарнірами, два з яких мають довжину $OK = OS = n$ і з'єднані в нерухомій точці O , решта (чотири) $PS = SQ = QK = PK$ утворює ромб, дві протилежні вершини якого з'єднані з кінцями стержнів b .



геометрична побудова інверсора Посельє

Інверсор має два ступені вільності: по-перше, обидва стержні a можна довільно наближати один до одного або віддаляти, а, по-друге, їх обох можна довільно обертати як ціле навколо O . При кожному такому русі три точки O, P, Q завжди розміщені на одній прямій. Справді, OP є бісектрисою кута SOK , а PQ — бісектрисою кута SPK . Нехай T є точка перетину діагоналей ромба. Тоді $ST = TK$ (TK на рисунку не показано), OT як медіана рівнобедреного трикутника SOK одночасно є його бісектрисою, тобто суміщається з OP . Таким чином, точки O, P і T , отже, і точка Q лежать на одній прямій. Якщо точку O закріпити, а в точках P і Q вставити олівці, то під час руху точки P по деякій кривій, точка Q описуватиме фігуру, інверсну цій кривій. Справді, неважко бачити, що

$$\begin{aligned} OQ \cdot OP &= OT + TQ \quad OT - TQ = OT^2 - TQ^2 = \\ &= SO^2 - ST^2 = a^2 - b^2 = \text{const} \end{aligned}$$

а це і підтверджує справедливність нашого висновку.

Зауважимо, що добуток $OP \cdot OQ$ є величина стала; вона не залежить від положення механізму. Стала величина $a^2 - b^2$ називається степенем інверсії. Оскільки ця різниця додатна, то можна позначити її через r^2 ; тоді з рівності $OQ \cdot OP = r^2$ випливає інверсність точок Q і P . Для того щоб точка P рухалась по колу, приєднаємо до неї ще сьомий стержень PR , другий кінець якого закріплено посередині між O і початковим положенням точки P або, як в нашому випадку, $OR = RP = m$; тоді залишається лише один степінь вільності, і точка Q буде рухатись по прямій QA .

Слід зауважити, що точка Q не може описувати всю нескінченну пряму QA ; її рух обмежений тим, що віддаль її від точки Q завжди менша $a + b$.

Частина прямої, що її описує точка Q завжди перпендикулярна до OR . Це випливає з того, що ортогональна проекція точки Q на пряму OR для будь-яких положень механізму фіксована, тобто довжина відрізка OA є величина стала. Справді, трикутники OPD і OAQ подібні; $OD \cdot OA = OP \cdot OQ$ або $OA = OQ \cdot OP : OD = r^2 : 2m$.

Така особливість інверсора дає можливість використати його як насос.

Література

1. Аргунов Б. И., Балк М. Б., Геометрические построения на плоскости / Аргунов Б. И., Балк М. Б. – Изд. 2. – М. : Учпедгиз, 1957. – 262 с.
2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П. С. – М. : Наука, 1979. – 512 с.